

# Un déterminant reproduisant

Jean-François Burnol

28 octobre 2010

## Résumé

Nous calculons le déterminant

$$D_{n+1} = \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

comme fonction du dernier des sextuplets  $(u, v, k; x, y, l)$ , en exprimant le résultat sous une forme qui reproduit celle des entrées de  $D_{n+1}$ .

Université Lille 1  
UFR de Mathématiques  
Cité scientifique M2  
F-59655 Villeneuve d'Ascq  
France  
burnol@math.univ-lille1.fr

## 1 Introduction

Considérons un opérateur différentiel de Sturm-Liouville sur un intervalle  $I = ]a, b[$ , de la forme  $H(f) = -(pf')' + qf$ , et l'équation aux valeurs propres associée :

$$H(f)(t) = -p(t)f''(t) - p'(t)f'(t) + q(t)f(t) = \lambda f(t) \quad (1)$$

Si  $g$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\mu$ , un calcul familier donne :

$$(\mu - \lambda) \int_{t_0}^{t_1} f(t)g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} f & -pf'' - p'f' + qf \\ g & -pg'' - p'g' + qg \end{vmatrix} dt = \left[ -p \begin{vmatrix} f & f' \\ g & g' \end{vmatrix} \right]_{t=t_0}^{t=t_1} \quad (2)$$

Si nous supposons que  $f$  et  $g$  sont assujetties toutes deux à la même condition initiale en  $t = t_0$ , nous obtenons la formule classique ( $\mu \neq \lambda$ ) :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)g(t) dt = p(t_1) \frac{g(t_1)f'(t_1) - g'(t_1)f(t_1)}{\mu - \lambda} \quad (3)$$

Nous supposons ici pour simplifier que nos fonctions sont à valeurs réelles, ainsi le terme de gauche peut être vu comme un produit scalaire. Il est souvent utile (en particulier pour calculer des projections orthogonales) de savoir calculer le déterminant d'une matrice de Gram  $G = (\int f_i(t)g_j(t) dt)_{1 \leq i,j \leq n}$  formée avec ces produits scalaires. On peut écrire le déterminant comme une intégrale multiple ([7, II, Nr 68]), le résultat est du type d'un produit scalaire formé par intégration sur un pavé  $n$ -dimensionnel, il ressemble plus au terme de gauche de l'équation (3) qu'à son terme de droite.

Nous montrons qu'il existe d'autres expressions, qui elles sont du type du terme de droite de l'équation (3). Quittant le domaine de l'Analyse, il s'agit d'évaluer le déterminant

$$D = \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i,j \leq n+1} \quad (4)$$

dépendant de  $6n + 6$  indéterminées  $(u_i, v_i, k_i; x_i, y_i, l_i)$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ . C'est ce que nous faisons ici, en isolant le dernier sextuplet  $(u, v, k; x, y, l)$  et en montrant une identité

$$\frac{1}{d} D = \frac{YU - XV}{l - k} \quad (5)$$

où  $d$  est le mineur  $n \times n$  principal de  $D$  (ne dépendant pas de  $(u, v, k; x, y, l)$ ), et où  $U, V, X$ , et  $Y$  sont des fonctions de  $(u, v, k; x, y, l)$  et des autres variables, mais avec la propriété que  $U$  et  $V$  ne dépendent pas de  $(x, y, l)$  et que  $X$  et  $Y$  ne dépendent pas de  $(u, v, k)$ .

Les entrées  $\frac{yu - xv}{l - k}$  de nos déterminants ont une forme que l'on retrouve très souvent. Nous avons déjà cité la théorie des opérateurs différentiels, on peut aussi évoquer par exemple les noyaux reproduisants de la théorie des polynômes orthogonaux (donnés par la formule de Christoffel-Darboux [8, 10]). L'identité (5) montre donc que la formation de déterminants en ces noyaux reproduisants donne un résultat de la même forme caractéristique (dans certains contextes, il peut être utile suivant les cas de faire des permutations du style  $U \leftrightarrow V$ ,  $X \leftrightarrow -Y$ , ou même de modifier  $U, V, X, Y$  par des facteurs imaginaires ou même encore d'en prendre des combinaisons linéaires appropriées).

On retrouve comme cas particulier (pour lequel  $(x_i, y_i, l_i) = (\overline{u_i}, \overline{v_i}, \overline{k_i})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) le résultat obtenu dans [1, Thm. 2]. Nous y posons la question de l'établir par des calculs de déterminants, sans faire de récurrence sur leur taille. En fait, il suffit pour cela de prendre pour point de départ la formule (équivalente au Thm. 4.2 de Okada dans [6]) que nous avons présentée dans [2, Thm. 1] et de poursuivre le calcul avec l'aide du cas particulier commun aux identités de Jacobi ([4], [5, VI, §175]) et de Sylvester ([9], [5, VI, §197]) et de quelques observations auxiliaires. Nous incluons toutes les démonstrations nécessaires afin d'éviter au lecteur non familier de la théorie des déterminants d'avoir à se reporter à d'autres sources.

## 2 Énoncé du théorème principal

Nous considérons  $6n + 6$  indéterminées  $(u_i, v_i, k_i; x_i, y_i, l_i)$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ , et posons  $u = u_{n+1}$ ,  $v = v_{n+1}$ ,  $k = k_{n+1}$ ,  $x = x_{n+1}$ ,  $y = y_{n+1}$ ,  $l = l_{n+1}$ . Nous notons  $D_{n+1}(u, v, k; x, y, l)$  le déterminant de taille  $(n + 1) \times (n + 1)$  :

$$D_{n+1}(u, v, k; x, y, l) = \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (6)$$

Soit  $D_n$  son mineur  $n \times n$  principal situé en haut à gauche. Posons :

$$U_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} & \ddots & u_i \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_j u - x_j v}{l_j - k} & \ddots & u \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad X_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} & \ddots & \frac{y u_i - x v_i}{l - k_i} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_j u - x_j v}{l_j - k} & \ddots & x \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad (7)$$

$$V_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} & \ddots & v_i \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_j u - x_j v}{l_j - k} & \ddots & v \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad Y_n = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} & \ddots & \frac{y u_i - x v_i}{l - k_i} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_j u - x_j v}{l_j - k} & \ddots & y \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad (8)$$

**Théorème.** On a

$$\frac{D_{n+1}(u, v, k; x, y, l)}{D_n} = \frac{Y_n(x, y, l)U_n(u, v, k) - X_n(x, y, l)V_n(u, v, k)}{l - k} \quad (9)$$

## 3 Preuve

Soit

$$E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (l_j - k_i) \cdot \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (10)$$

où l'on rappelle que  $u = u_{n+1}$ ,  $v = v_{n+1}$ , etc...

D'après [6, Thm. 4.2] ou [2, Thm. 1], plus précisément sous sa forme [2, éq. (21)],

$$E = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & ku & l_1 x_1 & l_2 x_2 & \cdots & l_n x_n & lx \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & k^n u & l_1^n x_1 & l_2^n x_2 & \cdots & l_n^n x_n & l^n x \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & kv & l_1 y_1 & l_2 y_2 & \cdots & l_n y_n & ly \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & k^n v & l_1^n y_1 & l_2^n y_2 & \cdots & l_n^n y_n & l^n y \end{vmatrix} \quad (11)$$

*Preuve.* Il est simple d'aller de (11) à (10). Soit  $E'$  le déterminant défini dans (11). Soit  $K$  (resp.  $L$ ) la matrice dont la  $i^{\text{e}}$  ligne est  $(k_1^{i-1}, \dots, k_n^{i-1}, k^{i-1})$  (resp.  $(l_1^{i-1}, \dots, l_n^{i-1}, l^{i-1})$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ), et soit  $D_u$  la matrice  $\text{diag}(u_1, \dots, u_n, u)$ , et sim.  $D_v$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ . Alors

$$\begin{aligned} E' &= \begin{vmatrix} KD_u & LD_x \\ KD_v & LD_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} KD_u & 0 \\ 0 & KD_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & D_u^{-1} K^{-1} LD_x \\ I & D_v^{-1} K^{-1} LD_y \end{vmatrix} \\ &= \det(K)^2 \det(D_u K^{-1} LD_y - D_v K^{-1} LD_x) \end{aligned} \quad (12)$$

Soit  $C_1(t), \dots, C_{n+1}(t)$  des polynômes de degrés au plus  $n$ , et  $C$  la matrice ayant leurs coordonnées dans  $(1, t, \dots, t^n)$  en lignes. Alors  $CK = (C_i(k_j))$  et  $CL = (C_i(l_j))$ . Posons  $A(t) = \prod_{1 \leq i \leq n+1} (t - k_i)$  et prenons  $C_i(t) = A(t)/(t - k_i)$ . On obtient  $K^{-1} = \text{diag}(A'(k_i)^{-1})C$  donc  $K^{-1}L = \text{diag}(A'(k_i)^{-1})(C_i(l_j))$  et

$$K^{-1}L = \text{diag}_{1 \leq i \leq n+1} (A'(k_i)^{-1}) \left( \frac{1}{l_j - k_i} \right) \text{diag}_{1 \leq j \leq n+1} (A(l_j)) \quad (13)$$

Donc

$$E' = \det(K)^2 \prod_i A'(k_i)^{-1} \prod_j A(l_j) \det\left(\frac{u_i y_j - v_i x_j}{l_j - k_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (14)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (l_j - k_i) \det\left(\frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (15)$$

Ainsi effectivement  $E = E'$ . □

On va utiliser un cas particulier commun aux identités de Jacobi (voir [5, VI, §175]) et de Sylvester ([9], [5, VI, §197]).

**Proposition** (Jacobi, [4]). *Soit  $n > 2$ , et  $M = (m_{ij})$  une matrice  $n \times n$ . Notons  $E = \det M$  et soit  $D$  le mineur obtenu dans  $E$  en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes. Alors*

$$ED = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \quad (16)$$

avec  $M_{ij}$  le mineur obtenu de  $E$  en supprimant la  $i^e$  ligne et la  $j^e$  colonne. Une identité semblable vaut pour deux lignes quelconques et deux colonnes quelconques.

*Preuve de l'identité de Jacobi.* Il suffit de faire la preuve avec les entrées de  $M$  des indéterminées indépendantes. Il existe une (unique) combinaison  $\lambda_3 C_3 + \dots + \lambda_n C_n$  des colonnes de numéros allant de 3 à  $n$  qui, soustraite à la première colonne  $C_1$ , annule tous ses éléments sauf les deux du haut. De même il existe une combinaison  $\mu_3 C_3 + \dots + \mu_n C_n$  qui, soustraite à la colonne  $C_2$  annule tous ses éléments sauf les deux premiers. Si l'on transforme le déterminant  $E$  par ces combinaisons, on a alors une forme par bloc et

$$E = \begin{vmatrix} m_{11} - \sum_{3 \leq j \leq n} \lambda_j m_{1j} & m_{12} - \sum_{3 \leq j \leq n} \mu_j m_{1j} \\ m_{21} - \sum_{3 \leq j \leq n} \lambda_j m_{2j} & m_{22} - \sum_{3 \leq j \leq n} \mu_j m_{2j} \end{vmatrix} \cdot D \quad (17)$$

Or dans le calcul du mineur  $M_{11}$  par exemple, la même soustraction (une fois seulement) de colonnes donne immédiatement  $M_{11} = (m_{22} - \sum_{3 \leq j \leq n} \mu_j m_{2j}) D$ . Idem pour les trois autres mineurs et on trouve donc

$$E = \begin{vmatrix} \frac{M_{22}}{D} & \frac{M_{21}}{D} \\ \frac{M_{12}}{D} & \frac{M_{11}}{D} \end{vmatrix} \cdot D = \frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{D} \quad (18)$$

ce qui prouve le résultat.  $\square$

**Remarque.** Cette proposition est le cas  $k = 2$  de l'énoncé plus général suivant, qu'on démontrerait à l'identique : soit  $E = |m_{ij}|$  de taille  $n \times n$ , soit  $k < n$ , soit  $F$  le mineur  $(n - k) \times (n - k)$  diagonal inférieur droit dans  $E$ , soit  $G = |g_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$  le déterminant  $k \times k$  avec  $g_{ij}$  le mineur  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  de  $E$  obtenu en bordant  $F$  par  $m_{ij}$  (et  $m_{iq}$ ,  $k + 1 \leq q \leq n$ ,  $m_{qj}$ ,  $k + 1 \leq q \leq n$ ). Alors  $G = F^{k-1}E$ . Sylvester [9] a un énoncé encore plus général en bordant par plusieurs lignes et colonnes. Et en ce qui concerne Jacobi, il s'agit du calcul des mineurs de l'adjoint (formé avec les co-facteurs) de  $E$ . Considérons  $K = |\tilde{m}_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$  le mineur principal  $k \times k$  de l'adjoint  $\tilde{E}$  ( $k \geq 2$ ). En appliquant ce qui vient d'être montré à  $E$  privé de la  $i^e$  ligne et de la  $j^e$  colonne, on a  $\tilde{g}_{ij} = F^{k-2} \tilde{m}_{ij}$ . Donc  $K = F^{k(2-k)} \tilde{G} = F^{k(2-k)} G^{k-1} = F E^{k-1}$ . Ceci est la formule de Jacobi, qui calcule les mineurs de  $\tilde{E}$ . Pour des énoncés synthétiques avec des lignes et colonnes arbitraires, voir l'article Déterminants, section F, de [3]. Notre proposition est  $F(3)$ , Jacobi est  $F(2)$  et (le cas particulier vu ici de) Sylvester est  $F(4)$ .

Nous appliquons ceci au déterminant de l'équation (11), en considérant les quatre entrées  $k^u$ ,  $k^v$ ,  $l^x$ ,  $l^y$  dont nous notons les co-mineurs, respectivement  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{V}$ ,

et  $\mathcal{U}$ . À la limite pour  $l \rightarrow \infty$  on a  $l^{-n}E = (-1)^{n+1}x\mathcal{V} + y\mathcal{U} + O(\frac{1}{l})$ . Or :

$$E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i)(l - k) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y u_i - x v_i}{l - k_i} \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (19)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} l^{-n}E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ y u_i - x v_i \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (20)$$

$$\mathcal{V} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (21)$$

$$\mathcal{U} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (22)$$

À la limite pour  $k \rightarrow \infty$  on a  $k^{-n}E = u\mathcal{V} + (-1)^{n+1}v\mathcal{X} + O(\frac{1}{k})$ . Or :

$$E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i)(l - k) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u - x_j v}{l_j - k} \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (23)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-n}E = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ y_j u - x_j v \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (24)$$

$$\mathcal{V} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) \left| \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \\ \vdots \end{array} \cdots \begin{array}{c} \vdots \\ y_j \\ \vdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (25)$$

$$\mathcal{X} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l - k_i) \left| \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \cdots & \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} & \cdots \\ \vdots & & \\ \cdots & x_j & \cdots \end{array} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad (26)$$

Avec les quantités  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{X}$ , et  $\mathcal{Y}$  ainsi définies on obtient :

$$ED = \mathcal{Y}\mathcal{U} - \mathcal{X}\mathcal{V} \quad (27)$$

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \cdot \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n} \quad (28)$$

Avec  $U_n$ ,  $V_n$ ,  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $D_n$  définis par (7), (8),

$$\mathcal{U} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) D_n U_n \quad (29)$$

$$\mathcal{V} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k) D_n V_n \quad (30)$$

$$\mathcal{X} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) D_n X_n \quad (31)$$

$$\mathcal{Y} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i) D_n Y_n \quad (32)$$

On obtient finalement

$$(-1)^n \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1} \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n} = (-1)^n D_n^2 \frac{Y_n U_n - X_n V_n}{l - k} \quad (33)$$

ce qui prouve le Théorème.

Au passage, nous avons obtenu par cette preuve des représentations de  $U_n$ ,  $V_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  à l'aide de déterminants de taille  $(2n+1) \times (2n+1)$  :

$$U_n = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & k u & l_1 x_1 & l_2 x_2 & \cdots & l_n x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & k^n u & l_1^n x_1 & l_2^n x_2 & \cdots & l_n^n x_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & k v & l_1 y_1 & l_2 y_2 & \cdots & l_n y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} v_1 & k_2^{n-1} v_2 & \cdots & k_n^{n-1} v_n & k^{n-1} v & l_1^{n-1} y_1 & l_2^{n-1} y_2 & \cdots & l_n^{n-1} y_n \end{vmatrix}}{(-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) D_n \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k)} \quad (34)$$

$$V_n = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & ku & l_1 x_1 & l_2 x_2 & \cdots & l_n x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} u_1 & k_2^{n-1} u_2 & \cdots & k_n^{n-1} u_n & k^{n-1} u & l_1^{n-1} x_1 & l_2^{n-1} x_2 & \cdots & l_n^{n-1} x_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & kv & l_1 y_1 & l_2 y_2 & \cdots & l_n y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & k^n v & l_1^n y_1 & l_2^n y_2 & \cdots & l_n^n y_n \end{vmatrix}}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) D_n \prod_{1 \leq j \leq n} (l_j - k)} \quad (35)$$

$$X_n = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & l_1 x_1 & l_2 x_2 & \cdots & l_n x_n & lx \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & l_1^n x_1 & l_2^n x_2 & \cdots & l_n^n x_n & l^n x \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & l_1 y_1 & l_2 y_2 & \cdots & l_n y_n & ly \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-1} v_1 & k_2^{n-1} v_2 & \cdots & k_n^{n-1} v_n & l_1^{n-1} y_1 & l_2^{n-1} y_2 & \cdots & l_n^{n-1} y_n & l^{n-1} y \end{vmatrix}}{(-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) D_n \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i)} \quad (36)$$

$$Y_n = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & l_1 x_1 & l_2 x_2 & \cdots & l_n x_n & lx \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-1} u_1 & k_2^{n-1} u_2 & \cdots & k_n^{n-1} u_n & l_1^{n-1} x_1 & l_2^{n-1} x_2 & \cdots & l_n^{n-1} x_n & l^{n-1} x \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & l_1 y_1 & l_2 y_2 & \cdots & l_n y_n & ly \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & l_1^n y_1 & l_2^n y_2 & \cdots & l_n^n y_n & l^n y \end{vmatrix}}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) D_n \prod_{1 \leq i \leq n} (l - k_i)} \quad (37)$$

Dans chacune de ces expressions apparaît au dénominateur la quantité

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (l_j - k_i) \left| \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} \right|_{1 \leq i, j \leq n} \quad (38)$$

qui est à chaque fois le mineur  $2n \times 2n$  obtenu en supprimant dans le dénominateur la ligne et la colonne contenant, respectivement,  $k^n u$ ,  $k^n v$ ,  $l^n x$ ,  $l^n y$ .



## 4 Un déterminant factorisant

Nous examinons le cas particulier :

$$x_i = u_i, y_i = -v_i, l_i = -k_i, 1 \leq i \leq n \quad (39)$$

$$1 \leq i, j \leq n \implies \frac{y_j u_i - x_j v_i}{l_j - k_i} = \frac{u_i v_j + v_j u_i}{k_i + k_j} \quad (40)$$

Les formules (7) et (8) montrent qu'en considérant  $U_n, V_n, X_n, Y_n$  comme fonctions de trois variables, les  $n$  triplets  $(u_i, v_i, k_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  étant fixés, on a les relations :

$$X_n(u, -v, -k) = U_n(u, v, k) \quad (41)$$

$$Y_n(u, -v, -k) = -V_n(u, v, k) \quad (42)$$

$$\frac{D_{n+1}(u, v, k; x, y, l)}{D_n} = \frac{U_n(u, v, k)V_n(x, -y, -l) + V_n(u, v, k)U_n(x, -y, -l)}{k + (-l)} \quad (43)$$

Si nous imposons les relations supplémentaires  $x = u, y = -v, l = -k$ , nous obtenons la factorisation

$$\frac{D_{n+1}(u, v, k)}{D_n} = \frac{1}{k} U_n(u, v, k) V_n(u, v, k) \quad (44)$$

L'équation (34) donne comme valeur de  $U_n$  :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & k u & -k_1 u_1 & -k_2 u_2 & \cdots & -k_n u_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & k^n u & (-1)^n k_1^n u_1 & (-1)^n k_2^n u_2 & \cdots & (-1)^n k_n^n u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v & -v_1 & -v_2 & \cdots & -v_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & k v & k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} v_1 & k_2^{n-1} v_2 & \cdots & k_n^{n-1} v_n & k^{n-1} v & (-1)^n k_1^{n-1} v_1 & (-1)^n k_2^{n-1} v_2 & \cdots & (-1)^n k_n^{n-1} v_n \end{vmatrix} \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j) \quad (45)$$

On fait les  $\left[\frac{n}{2}\right]$  permutations de lignes  $2k \leftrightarrow 2k + n + 1$ ,  $1 \leq 2k \leq n$ . Puis, lorsque  $n$  est impair il faut aussi mettre la  $(n+1)^e$  ligne en dernière position. On a donc un signe  $(-1)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Puis, on soustrait les  $n$  premières colonnes des  $n$  dernières. Ceci met le déterminant sous une forme par blocs, et donne, si  $n$  est pair :

$$U_n = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & k v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & k^n u \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} u_1 & k_2^{n-1} u_2 & \cdots & k_n^{n-1} u_n \end{vmatrix}_{n \times n}}{2^{-n} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)} \quad (46)$$

et pour  $n$  impair :

$$U_n = \frac{\left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} u_1 & k_2^{n-1} u_2 & \cdots & k_n^{n-1} u_n \end{array} \right|_{n \times n} \left| \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & k u \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n u_1 & k_2^n u_2 & \cdots & k_n^n u_n & k^n u \end{array} \right|_{n+1 \times n+1}}{2^{-n} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)} \quad (47)$$

L'équation (35) donne comme valeur de  $V_n$  :

$$\frac{\left| \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & k u & -k_1 u_1 & -k_2 u_2 & \cdots & -k_n u_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} u_1 & k_2^{n-1} u_2 & \cdots & k_n^{n-1} u_n & k^{n-1} u & (-1)^{n-1} k_1^{n-1} u_1 & (-1)^{n-1} k_2^{n-1} u_2 & \cdots & (-1)^{n-1} k_n^{n-1} u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v & -v_1 & -v_2 & \cdots & -v_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & k v & k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & k^n v & (-1)^{n+1} k_1^n v_1 & (-1)^{n+1} k_2^n v_2 & \cdots & (-1)^{n+1} k_n^n v_n \end{array} \right|}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)} \quad (48)$$

On fait les  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  permutations de lignes  $2k \leftrightarrow 2k + n$ ,  $1 \leq 2k \leq n$ . Puis, lorsque  $n$  est impair il faut aussi mettre la dernière ligne en  $(n+1)^e$  position. On obtient, pour  $n$  pair :

$$V_n = \frac{\left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} v_1 & k_2^{n-1} v_2 & \cdots & k_n^{n-1} v_n \end{array} \right|_{n \times n} \left| \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & k u \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & k^n v \end{array} \right|_{n+1 \times n+1}}{2^{-n} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)} \quad (49)$$

et pour  $n$  impair :

$$V_n = \frac{\left| \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & k v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ k_1^n v_1 & k_2^n v_2 & \cdots & k_n^n v_n & k^n v \end{array} \right|_{n+1 \times n+1} \left| \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_1^{n-1} v_1 & k_2^{n-1} v_2 & \cdots & k_n^{n-1} v_n \end{array} \right|_{n \times n}}{2^{-n} D_n \prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j) \prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)} \quad (50)$$

La même technique, en partant de (11), permet la factorisation de  $D_{n+1}$  (et de

$D_n$ ). On obtient :

$$D_{n+1} = 2^{n+1} \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & kv \\ k_1^2 u_1 & k_2^2 u_2 & \cdots & k_n^2 u_n & k^2 u \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1}}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (k_i + k_j)} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & ku \\ k_1^2 v_1 & k_2^2 v_2 & \cdots & k_n^2 v_n & k^2 v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad (51)$$

$$D_n = \left| \frac{u_i v_j + v_j u_i}{k_i + k_j} \right|_{n \times n} = 2^n \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}_{n \times n}}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (k_i + k_j)} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}_{n \times n} \quad (52)$$

Donc le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n & u \\ k_1 v_1 & k_2 v_2 & \cdots & k_n v_n & kv \\ k_1^2 u_1 & k_2^2 u_2 & \cdots & k_n^2 u_n & k^2 u \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad (53)$$

divisé par son mineur principal de taille  $n \times n$  et par le produit  $\prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)$  est égal, pour  $n$  pair à  $U_n$  (dans ce cas il y a  $k^n u$  en position  $(n+1, n+1)$  dans (53)) et pour  $n$  impair à  $V_n$  (dans ce cas il y a  $k^n v$  en position  $(n+1, n+1)$ ). Le déterminant

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v \\ k_1 u_1 & k_2 u_2 & \cdots & k_n u_n & ku \\ k_1^2 v_1 & k_2^2 v_2 & \cdots & k_n^2 v_n & k^2 v \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{n+1 \times n+1} \quad (54)$$

divisé par son mineur principal de taille  $n \times n$  et par le produit  $\prod_{1 \leq j \leq n} (k + k_j)$  est égal à  $V_n$  pour  $n$  pair (il y a alors  $k^n v$  en bas à droite dans (54)) et à  $U_n$  pour  $n$  impair ( $k^n u$  en bas à droite dans (54)). Conformément à (44), le quotient  $\frac{D_{n+1}}{D_n}$  est égal à  $\frac{1}{k} U_n V_n$  (pour  $x = u$ ,  $y = -v$ ,  $l = -k$ ).

# Références

- [1] J.-F. Burnol, *Hilbert spaces of entire functions with trivial zeros*, juillet 2010, 10 pages. [arXiv:1008.0518](#)
- [2] J.-F. Burnol, *Paley-Wiener spaces with vanishing conditions and Painlevé VI transcendents*, juillet 2010, 30 pages. [arXiv:1008.0617](#)
- [3] K. Itô, ed., *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, MIT Press, 2nd ed., 1987. 2148 pp.
- [4] C.G.J. Jacobi, *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematibus de transformatione et determinatione integralium multiplicium*, Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 12 (1833), p. 1-69.
- [5] T. Muir, *A treatise on the theory of determinants*, revised and enlarged by William H. Metzler. Dover Publications, Inc., New York 1960 vii+766 pp
- [6] S. Okada, *Applications of Minor Summation Formulas to Rectangular-Shaped Representations of Classical Groups*, J. of Algebra, Vol. 205, no. 2 (1998) 337-367
- [7] G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Band I : Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie*. Vierte Auflage. Heidelberger Taschenbücher, Band 73 Springer-Verlag, Berlin-New York 1970 xvi+338 pp
- [8] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1. Classical theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 54, Part 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xxvi+466 pp.
- [9] J.J. Sylvester, *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions*, Philosophical Magazine Series (Fourth Series) 1 (1851), 295-305
- [10] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. xiii+432 pp